

# **Anexo A. Los filtros antitrombos**

## **A.1. Origen de los filtros antitrombo**

La primera ligadura de la vena cava inferior (VCI) de la que se tiene noticias se efectuó a finales del siglo pasado para controlar una hemorragia causada por un traumatismo operatorio y demostró que un enfermo podía sobrevivir con la VCI ligada [23].

El primer tratamiento para evitar el embolismo pulmonar fue la ligadura de la vena femoral común por debajo de la vena safena. La vena safena se debaja intacta para mantener el drenaje de las extremidades inferiores, creyendo que los trombos dentro del sistema superficial estaban relativamente fijos y no existía peligro de TEP, salvo en el caso de que alcanzaran la vena femoral común. Sin embargo esta táctica fue ineficaz para prevenir el TEP en numerosas ocasiones debido a la extensión proximal del trombo o por existir trombosis a nivel de las venas pélvicas[23].

A mediados de los 40, Oscher y De-Bakey, y O'Neil propusieron ligar la VCI para prevenir el TEP originado en los miembros inferiores y en la pelvis. Este procedimiento consiguió reducir la rrecurrencia de TEP pero requería cirugía mayor, conllevando una mortalidad del 12%. Además producía una reducción del gasto cardiaco de hasta un 47% e insuficiencia venosa crónica entre el 4 y el 57% de los casos[23].

Se comenzó a buscar un método que proporcionara protección de los émbolos manteniendo la integridad de la VCI, así Spencer describió la plicadura de la vena cava, que realizaba suturando dicho vaso para convertirlo en tubos paralelos de pequeñas luces, como un enrejado, que permitirían el flujo sanguíneo impidiendo el paso de los émbolos. Otros cirujanos desarrollaron grapas y clips para el mismo propósito. Todos estos métodos interruptivos demostraron ser efectivos, aunque la utilización de clips externos era técnicamente más sencilla, más rápida y más fiable que los métodos de sutur. La permeabilidad de la VCI mejoró hasta el 76-80% y el TEP recurrente descendió al 4%[23].

Las secuelas de insuficiencia venosa crónica ocurrían en el 15.7% de los pacientes aunque no existía correlación directa entre el edema y la integridad de la VCI. La morbimortalidad que acompaña el acto quirúrgico seguía siendo elevada, por lo que en la actualidad, la indicación principal de implantación de un clip de cava se restringe a pacientes sometidos a cirugía abdominal o pélvica con múltiples factores de riesgo tromboembólico, ya que no se añade mortalidad al procedimiento primario y confieren una profilaxis efectiva contra el TEP[23].

La siguiente fase del desarrollo de sistemas interruptivos en la VCI fue la colocación de los mismos dentro de su luz desde la vena femoral o yugular. En 1970 Hunter desarrolló un balón hinchable que era introducido a través de una venotomía de la vena yugular interna. El balón de Hunter ocluía totalmente la VCI, desinflándose gradualmente en 1-2 años tras su

implantación, mientras que la pared venosa adyacente se fibrosaba y estenosaba acomodándose al tamaño residual del balón. Este procedimiento tenía la ventaja de evitar una cirugía mayor pero dejaba la vena cava totalmente ocluida. Eichelter y cols. En 1968 usaron un sistema de paraguas que fue experimentado en perros. Consistía en un sistema coaxial que se colocaba en la vena femoral y que podía ser removido más tarde. El potencial de embolización, de trombos atrapados o adheridos, al ser retirado impidió su uso en personas[23]. Pate et al. En 1969 diseñaron una placa revestida de dacron en forma de muelle que era colocada transfemoralmente reducía la luz a un rectángulo no mayor de 3 mm. Este sistema parecía filtrar los émbolos adecuadamente pero su uso no se extendió.

Mientras tanto se desarrollaba el paraguas de Mobin-Uddin que estuvo disponible en 1970. Este paraguas estaba compuesto por 6 delgados radios de acero inoxidable que se hallaban cubiertos por una fina membrana fenestrada de plástico impregnada en heparina. La parte distal de los radios se extendía 2 mm más allá del componente plástico y las fenestraciones eran de 1.5 o 3 mm de diámetro. Originalmente su diámetro era de 23 mm, pero a causa de su tendencia migratoria se aumentó a 28 mm[23].

La Figura 36 muestra varios dispositivos que han sido usados para la interrupción del flujo venoso.

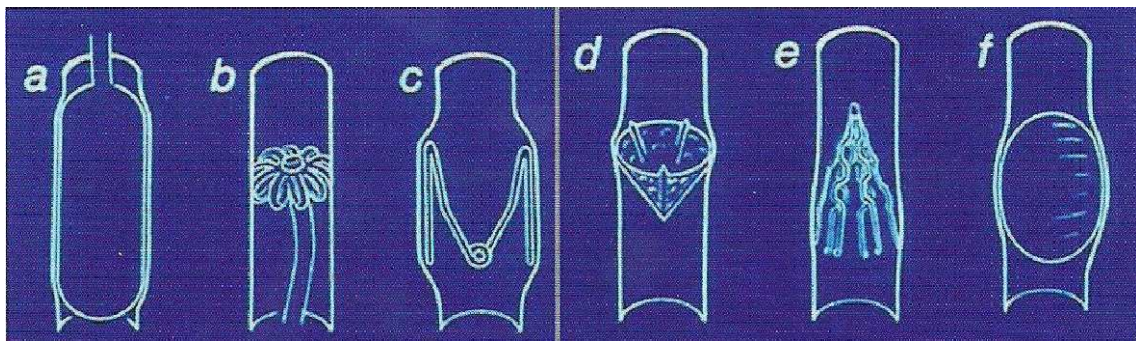


Figura 36. Diversos tipos de dispositivos para interrumpir el flujo venoso en la vena cava inferior: a. Balón de Moretz, b.Filtro de Eichelter, c.clip dePate, d.Filtro de Mobin-Uddin, e.Filtro de Kimray Greenfield, f.balón de Hunter

## **A.2. Evolución de los filtros antitrombo**

El paraguas de Mobin-Uddin fue inicialmente implantado mediante venotomía yugular bajo anestesia local. Sin embargo, en algunas ocasiones la venotomía se asoció con sangrado o ronquera en relación con la afectación del nervio laríngeo recurrente por lo que Rizk y Knight describieron un método percutáneo de intrudcción del filtro mediante abordaje yugular o femoral. El principal avance de este filtro con respecto a los sistemas interruptivos usados con anterioridad, fue la disminución de la tasa de mortalidad operatoria y también consiguió reducir el TEP recurrente al 2%. Aunque sus secuelas variaban entre el 6 y el 75% se demostró que la VCI se encontraba ocluida en el 60-70% de los casos, favoreciendo el desarrollo de grandes colaterales que conllevaban un importante riesgo potencial de recurrencia.

Poco después de la instrucción del filtro de Mobin-Udin, apareció el filtro de Kimray-Greenfield o filtro de Greenfield de acero inoxidable (FGAC). Es un filtro cónico de 5.6 cm de longitud, con un vértice cefálico y 6 patas de acero inoxidable equidistantes entre sí que dejan un espacio de 2 mm en el centro y de 6 mm en base, ya que el flujo laminar sanguíneo llevaría los émbolos de tamaño igual o superior a 3 mm hacia el ápex donde quedaría atrapados, siendo posteriormente disueltos por el sistema fibrinolítico endógeno. En el extremo distal de las patas hay unos ganchos que sirven para la fijación del filtro dentro de la pared de la VCI. Al igual que el paraguas de Mobin-Uddin, el filtro de Greenfield fue originalmente implantado mediante venotomía yugular o femoral. Posteriormente se consiguió su colocación por vía percutánea de manera fácil y con gran seguridad. La mortalidad operatoria fue baja (0.2%) y la tasa de embolismo recurrente fue similar a la del filtro de Mobin-Uddin. La principal ventaja del filtro de Greenfield reside en que mantiene la permeabilidad de la VCI en el 95-98% de los casos, evitándose el desarrollo de venas colaterales que puenteen el dispositivo[23]. Debido principalmente a que la implantación percutánea del FGAC se asociaba a una alta incidencia de trombosis del acceso venoso se desarrolló el filtro de Greenfield de titanio (FGT).

A pesar de los buenos resultados obtenidos experimentalmente, en los estudios clínicos preliminares se demostró una incidencia del 30% de desplazamiento distal con angulación y sospecha de perforación de la VCI por lo que el FGT fue retirado del mercado. Se realizaron 6 modificaciones del diseño del filtro obteniéndose los mejores resultados con el tipo VI en el que en la parte final de las patas se instauraba un gancho recurvado con una angulación de 80 grados. Con las mismas características técnicas que el FGT y añadiéndole el gancho recurvado en el extremo distal de las patas comenzó a comercializarse el filtro de Greenfield de titanio modificado (FGTM)[23].

Los filtros de Mobin-Uddin y de Greenfield de acero inoxidable son los prototipos del concepto actual de filtro para la interrupción del flujo de vena cava inferior. A parte de estos dos filtros, se han ido desarrollando diferentes tipos de filtro. La utilización de uno u otro depende del método de inserción y de las características del paciente.

Otros tipos de filtro usados son el filtro de Bird's Nest, el filtro de Simon nitinol (FSN)(Figura 37), el filtro Vena Tech, el filtro Antheor, el filtro Gunther Tulip y muchos otros.

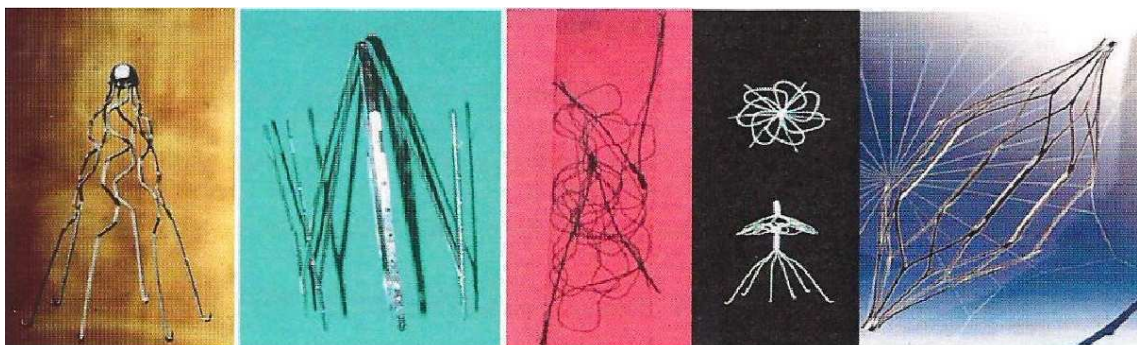


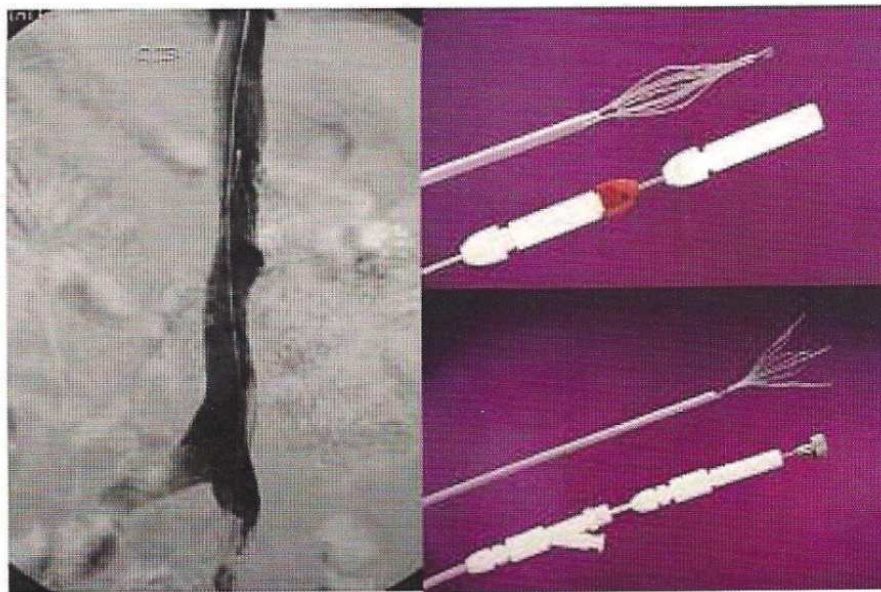
Figura 37. Algunos de los tipos de filtro actual: (De izquierda a derecha) Greenfield, LGM, Bird's nest, Simon Nitinol, Optease.



### **A.2.3 Los filtros recuperables**

Los filtros permanentes pueden presentar complicaciones derivadas de su implantación a medio y largo plazo. Por esta razón, apareció la necesidad de desarrollar dispositivos que pudieran ser recuperados, tras realizar su trabajo. Los filtros recuperables pueden ser extraídos del organismo si las condiciones clínicas lo exigen o permanecer indefinidamente en el interior de la vena. Por otro lado, los filtros temporales tienen que ser necesariamente extraídos después de permanecer un periodo de tiempo en el organismo. A pesar de ser dispositivos que son implantados de forma temporal, precisan de mecanismo de sujeción a la pared venosa para impedir la migración durante el tiempo que estén implantados.

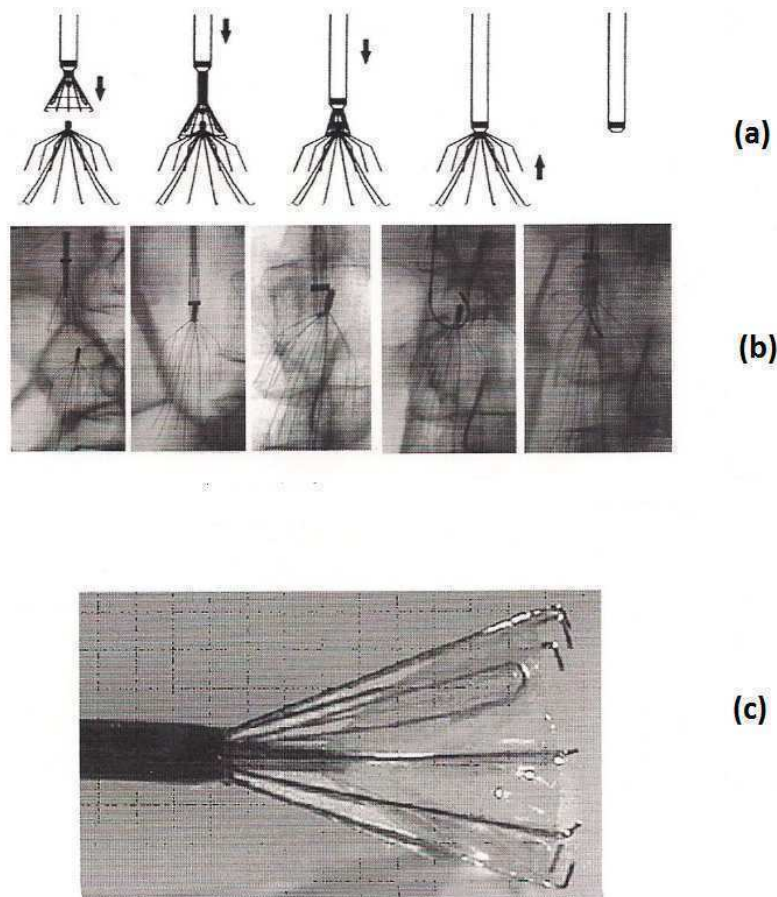
La gran mayoría de los filtros recuperables son de inserción femoral o yugular. La implantación femoral o yugular no difieren en la técnica y en las necesidades y cuidados que requieren los filtros definitivos. Para poder ser implantados es necesario, primero, una cavografía en dos proyecciones o TC, asepsia, monitorización y técnica depurada. La vaina introductora varía desde 6 a 8 F y cada tipo de filtro tiene especificaciones especiales proporcionadas por la casa comercial. La Figura 38 muestra el sistema de implantación del filtro.



**Figura 38. Sistema recuperador del filtro. Izquierda: cavografía con filtro ya liberado. Derecha: Sistema de liberación femoral y yugular del mismo filtro.**

Cada dispositivo dispone de su sistema específico para la recuperación del filtro. La recuperación requiere previa cavografía o TC que demuestre la no existencia de trombos atrapados dentro del filtro o la trombosis extensa de la vena cava. Todos los tipos de dispositivo requieren ser atrapados o por un lazo o por una tulipa. Una vez atrapados se introducen en el interior de la vaina para extraerlos fuera de la vena cava. Posteriormente se realiza una cavografía en dos proyecciones para verificar que no existen complicaciones intra o

extravasculares. La Figura 39 muestra el proceso que se lleva a cabo a la hora de recuperar el dispositivo.



**Figura 39.Extracción del filtro antitrombo: (a):Esquema que muestra los diferentes pasos de recuperación del filtro. (b):Estudio radiográfico secuencial que muestra los diferentes pasos de la técnica. (c): Detalle del sistema de recuperación del filtro.**

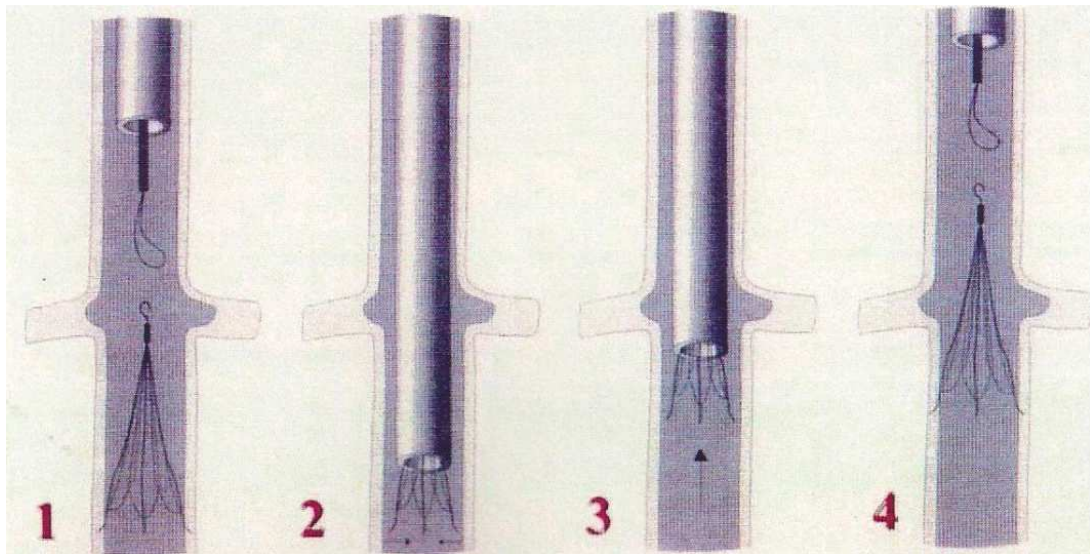
Las complicaciones derivadas del uso de filtros de VCI recuperables son comunes con las complicaciones que pueden tener lugar con el uso del resto de filtros de VCI en general, si bien principalmente están relacionadas con la técnica utilizada y la experiencia de quien lleva a cabo el procedimiento. Al gunas de las complicaciones posibles son: la dificultad en la liberación, la implantación inadecuada, apertura incompleta del dispositivo en el interior de la vena cava, la angulación del dispositivo, la migración del dispositivo, la perforación de la VCI, la fractura del filtro, la trombosis de VCI o la incorporación del filtro en la pared de la vena cava.

Los filtros recuperables reúnen las condiciones técnicas y de seguridad necesarias para su uso clínico. La fijación del filtro en la pared de la vena cava se va a realizar mediante los grafios, ganchos, o amarres propios del dispositivo. El filtro, posteriormente se va incorporando a la pared de la vena cava, gracias a los fenómenos de fibrosis y endotelización de la misma. En principio estas circunstancias son necesarias y útiles para que el filtro no migre. Si el sistema de fijación es muy firme o tiene lugar una rápida endotelización, va a suponer una limitación

en cuanto a la recuperación del filtro. Esta tendencia a la remodelación del vaso y consiguiente fibrosis constituye la principal limitación al uso de los filtros recuperables.

Con el objeto de prolongar el tiempo de permanencia de un filtro en la VCI, sin modificar su eficacia y seguridad se han iniciado diversos caminos de investigación: Nuevos modelos de filtro que produzcan menos daño endotelial y que permitan fácilmente la extracción del mismo o el recubrimiento del filtro con sustancias inhibidoras de la proliferación celular con el objeto de retrasar la fibrosis y poder ser extraídos sin dificultad en tiempos más prolongados.

Además, con el objeto de prolongar el tiempo de permanencia algunos autores propusieron reposicionar el filtro cada 12 o 14 días. Esta maniobra permitía un tiempo ilimitado de permanencia pero a su vez aumentaba las posibilidades de complicaciones. La Figura 40 muestra los pasos seguidos en la técnica de reposicionamiento.



**Figura 40. Técnica de reposicionamiento cada 12 días para prolongar el tiempo de permanencia del filtro postimplantación**

## **Anexo B. Ecuaciones del proceso de cálculo**

### **B.1. Métodos empleados para las soluciones numéricas**

El cálculo de las simulaciones se ha realizado mediante CFD (Computational Fluid Dynamics), el cual es una herramienta que permite simular, entre otros, el comportamiento de sistemas fluidos. Esta herramienta trabaja resolviendo las ecuaciones del flujo fluido en la región de estudio bajo unas condiciones de contorno específicas definidas sobre el dominio de trabajo[9].

CFD es una técnica que puede ser usada en una gran variedad de campos, como puede ser, para el cálculo de ventilación, en procesos de combustión, en procesos de transferencia de calor, para estudios biomédicos, etc.

Las ecuaciones que describen el comportamiento fluido son las ecuaciones de Navier-Stokes. Estas son ecuaciones diferenciales que no tienen una solución general analítica exceptuando en casos especiales. Para poder obtener una solución numérica es necesario usar métodos de discretización que aproximan las ecuaciones diferenciales por un sistema de ecuaciones algebraicas que pueden ser resueltas por un ordenador[33].

A pesar de las ventajas que estos métodos numéricos ofrecen, hay que tener en cuenta que la solución numérica obtenida es una aproximación de la solución exacta, ya que se han realizado numerosas aproximaciones tanto en las ecuaciones de partida, como en la discretización y generalmente se resuelven usando métodos iterativos[33, 34].

Las principales limitaciones de este método son las siguientes[33]:

- Las ecuaciones que gobiernan el problema generalmente no tienen solución exacta, por eso se aplican aproximaciones o modelos. Incluso si la ecuación exacta es resoluble, es necesaria la utilización de modelos para reducir el coste computacional.
- La exactitud de la solución numérica obtenida dependerá de la calidad de la discretización usada. Los errores de discretización serán menor cuanto mayor sea la precisión en la discretización pero esto da lugar a un aumento tanto en el tiempo como en el coste de cálculo de la solución. Por eso es necesario llegar a un compromiso.
- Por último hay que tener en cuenta que los métodos de resolución directos son muy caros por lo que se suelen usar métodos iterativos. El problema de estos métodos son los errores que ocasionan si la iteración es parada antes de tiempo. Solo si el proceso

de cálculo se mantiene durante un gran periodo de tiempo se podrá obtener la solución exacta.

Existen diferentes métodos que aproximan las ecuaciones diferenciales por ecuaciones algebraicas aunque los más importantes son el de diferencias finitas, el de volúmenes finitos y el de elementos finitos. Cada uno de estos métodos conduce a la misma solución si la discretización usada es suficientemente fina. El más usado y con el que trabaja ANSYS CFX es el método de volúmenes finitos.

El primer paso para resolver este tipo de problemas consiste en realizar la discretización de la región de estudio. La localización discreta, donde las variables van a ser calculadas, va a ser definida mediante una malla numérica que consiste en la representación de la geometría del dominio donde el problema va a ser resuelto. Esta malla va a dividir el dominio en un número finito de subdominios. Existen programas concretos que permiten la generación de mallas. En este proyecto se ha usado el programa ANSYS ICEM CFD.

Existen diferentes tipos de mallas, como son mallas estructuradas, mallas estructuradas en bloques y mallas no estructuradas. Estas últimas son las más usadas ya que pueden ser generadas automáticamente. Se usan sobre todo para geometrías complejas y para su cálculo mediante elementos o volúmenes finitos. Los elementos o volúmenes de control, en este tipo de mallas, pueden no tener ninguna forma aunque generalmente se usan triángulos o cuadriláteros en 2D y tetraedros y hexaedros en 3D.

La principal ventaja de este tipo de malla es su flexibilidad para adaptarse a la geometría, pero su principal inconveniente es que esta flexibilidad da lugar a una estructura de datos irregular. Debido a esto la matriz de ecuaciones algebraicas no suele tener una estructura regular por lo que es necesario reordenar los puntos antes de proceder al cálculo, por ello los cálculos con este tipo de discretización son más lentos.

Una vez realizada la discretización se debe elegir el tipo de aproximación y por último el criterio de convergencia

## **B.2. Discretización mediante elementos finitos**

Este tipo de discretización surge partiendo de la idea de dividir un problema complejo en sus componentes individuales o elementos cuyo comportamiento pueda conocerse sin dificultad y a continuación reconstruir el sistema original para estudiarlo a partir de esos componentes individuales.

Cuando se obtiene un modelo mediante un número finito de elementos bien definidos se le llama problema discreto. Por el contrario, cuando la división se da de manera indefinida y se obtienen infinitos elementos, el problema queda expresado mediante ecuaciones diferenciales y se le llama problema continuo. La resolución de los problemas continuos sólo puede llevarse a cabo mediante manipulaciones matemáticas.



Para ello se basa en la división del dominio en un número finito de subdominios denominados elementos mediante los cuales se va a aproximar la solución del problema. Dichos elementos se definen mediante un número discreto de puntos denominados nodos que conectan entre si los elementos. Sobre estos nodos se van a calcular las incógnitas del problema, que por ejemplo, en el caso de problemas estructurales son los desplazamientos.

El método de elementos finitos es un método general para la obtención de soluciones aproximadas para problemas de contorno definidos mediante ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Consiste en transformar las ecuaciones diferenciales que definen el problema en un conjunto de ecuaciones algebraicas.

La formulación débil en la que se basa el método de elementos finitos consiste en rebajar la derivada de la función incógnita. Una vez que se ha realizado el planteamiento débil del problema se pasa a aplicar el método de elementos finitos, es decir, se aproxima la incógnita mediante la aproximación de Galerkin, mediante pequeños trozos de rectas.

Se puede decir que las etapas para realizar un cálculo de elementos finitos son las siguientes[9]:

- Discretización adecuada del dominio (número, tamaño, tipo y situación de los elementos).
- Cálculo de propiedades elementales.
- Ensamblaje de vectores y matrices elementales.
- Imposición de las condiciones de contorno.
- Solución del sistema de ecuaciones y obtención de los valores de los grados de libertad en los nudos.
- Cálculo de variables auxiliares.

La principal dificultad del método es decidir que elemento elegir para cada caso en concreto. En la práctica, los elementos más utilizados son los triángulos CST y LST y los cuadriláteros bilineal y Serendip.

La elección del tipo de elemento depende de caso en particular, los elementos cuadriláteros son preferibles a los triángulos, en el caso de análisis de sólidos, ya que mejoran la convergencia para el mismo número de grados de libertad, sin embargo son menos flexibles para producir contornos complicados.

## **B.3 Discretización mediante volúmenes finitos**

Las ecuaciones de Navier-Stokes, que rigen el comportamiento fluido, sólo tienen solución analítica para fluidos simples bajo condiciones ideales. Si se quiere obtener una solución de estas ecuaciones para un fluido real se deben adoptar aproximaciones numéricas que transformen las ecuaciones diferenciales en un conjunto de ecuaciones algebraicas para posteriormente ser resueltas mediante métodos numéricos.

En este proyecto se ha usado el programa ANSYS CFX para resolver el problema fluido. Este programa utiliza como método numérico una discretización mediante volúmenes finitos. El método de volúmenes finitos se basa en usar la forma integral de las ecuaciones de conservación, en dividir el dominio en un número finito de volúmenes de control y en aplicar las ecuaciones de conservación en cada uno de los volúmenes de control [32].

En el centro de cada volumen de control se encuentra un nodo sobre el que se van a calcular los valores de las variables. Además las integrales de superficie y de volumen van a ser aproximadas dando lugar a una ecuación algebraica por cada volumen de control.

Este método puede ser usado para cualquier tipo de malla, por lo que es apropiado para geometrías complejas.

La discretización numérica, basada en el método de volúmenes finitos, llevada a cabo por el programa ANSYS CFX se va a explicar a continuación.

En primer lugar, una vez que el dominio se ha discretizado mediante una malla tridimensional, esta va a ser usada por el programa para crear volúmenes finitos. Todas las variables y las propiedades del fluido se encuentran almacenadas en los nodos, es decir, en los vértices de la malla, alrededor de los cuales se va a crear un volumen de control.

Las ecuaciones de Navier-Stokes expresadas en manera diferencial pueden ser transformadas en ecuaciones en forma integral mediante el teorema de la divergencia de Gauss. Es con las ecuaciones en forma integral con las que se va a trabajar discretizando previamente las integrales de volumen y de superficie.

Las ecuaciones de volumen van a ser discretizadas en el interior de cada sector del elemento de volumen mientras que las ecuaciones de superficie van a ser discretizadas en los puntos de integración, localizados en el centro de cada segmento de superficie.

La función incógnita se encuentra almacenada en cada uno de los nodos. Para poder evaluar todos los términos de esta se realiza una aproximación de la función incógnita en los puntos de integración. ANSYS CFX utiliza para ello funciones de forma de elementos finitos.

# **Anexo C. Concepto básicos de mecánica de fluidos**

## **C.1. Introducción**

La mecánica de fluidos es la rama de la física que se encarga del estudio de las leyes que rigen el comportamiento de un fluido en estado de reposo y de movimiento, así como sus interacciones con las fronteras sólidas que lo limitan.

Un fluido se considera básicamente que es una sustancia en estado líquido o gaseoso que puede fluir, es decir, moverse. El origen de la diferencia entre líquidos y gases está en la magnitud de sus fuerzas cohesivas. En un líquido la distancia intermolecular es menor, por tanto, las fuerzas cohesivas son mayores. Esto se traduce en el campo macroscópico a que los líquidos tienden a conservar su volumen. Sin embargo, una definición más técnica es que un fluido es en sí una sustancia que se deforma continuamente en tanto se le aplique un esfuerzo cortante, sin importar que tan pequeño pueda ser este[2].

La hipótesis del medio continuo es la hipótesis fundamental de la mecánica de fluidos. En esta hipótesis se considera que el fluido es continuo a lo largo del espacio que ocupa, ignorando por tanto su estructura molecular y las discontinuidades asociadas a esta. Con esta hipótesis se puede considerar que las propiedades de los fluidos son funciones continuas. El concepto de partícula fluida es muy importante en la mecánica de fluidos. Se le da el nombre de partícula fluida a la masa elemental de fluido que en un instante determinado se encuentra en un punto del espacio. Dicha masa elemental debe de ser lo suficientemente grande como para contener un gran número de moléculas, y lo suficientemente pequeña como para considerar que en su interior no hay variaciones de las propiedades macroscópicas del fluido, de modo que en cada partícula fluida se pueda asignar un valor a estas propiedades. Es importante tener en cuenta que la partícula fluida se mueve con la velocidad macroscópica del fluido, de modo que está siempre formada por las mismas moléculas[2].

- **Densidad**

La densidad se define como la cantidad de materia contenida por unidad de volumen de una sustancia. Se puede expresar como densidad de masa, densidad relativa, peso específico o volumen específico. En general, la densidad de un material varía al cambiar la presión o la temperatura. Se puede demostrar, utilizando la termodinámica que al aumentar la presión debe aumentar la densidad de cualquier material estable.

- **Compresibilidad**

La compresibilidad es una propiedad de la materia a la cual se debe que todos los cuerpos disminuyan de volumen al someterlos a una presión o compresión determinada manteniendo constantes otros parámetros [5w].

- Viscosidad

Es la propiedad de un fluido que tiende a oponerse a su flujo cuando se le aplica una fuerza. A mayor viscosidad, mayor resistencia a fluir. La unidad de viscosidad en el sistema c.g.s. es el poise. La viscosidad de un fluido disminuye con la reducción de densidad que tiene lugar al aumentar la temperatura. La viscosidad del agua a temperatura ambiente (20°C) es de 0,0100 poises, mientras que en el punto de ebullición (100°C) disminuye hasta 0,0028 poises [4w].

- Número de Reynolds

El número de Reynolds es el parámetro adimensional más conocido en mecánica de fluidos. Su nombre es en honor a Osborne Reynolds (1842- 1912), ingeniero británico quien fue el primero en demostrar que esta combinación de variables se podía usar como criterio para distinguir entre flujo laminar y flujo turbulento. En casi todos los problemas de flujo de fluidos hay una longitud y una velocidad características, así como las propiedades de densidad, viscosidad del fluido, que son variables relevantes en el problema. Así, con estas variables el número de Reynolds se calcula como sigue: [3]

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu}$$

Donde:

Re= Número de Reynolds

$\rho$  = Densidad del fluido en Kg/m<sup>3</sup>

V = Velocidad media del fluido m/s

D = Diámetro interior de la tubería en m

$\mu$  = Viscosidad del fluido en Kg/ms

El número de Reynolds es una medida de la razón de la fuerza de inercia sobre un elemento de fluido a la fuerza viscosa sobre un elemento. Cuando estos dos tipos de fuerzas son importantes en un problema dado, el número de Reynolds desempeña un papel importante, el cual permite predecir el carácter turbulento o laminar en ciertos casos. Así por ejemplo en conductos, si el número de Reynolds es menor de 2000 el flujo será laminar y si es mayor de 4000 el flujo será turbulento.

Los flujos con número de Reynolds muy pequeños suelen denominarse como “flujos reptantes”. Recíprocamente, para flujos con números de Reynolds grandes, los efectos viscosos son pequeños con respecto a los efectos inerciales y en estos casos puede ser posible ignorar el efecto de la viscosidad y considerar el problema como uno que implica un fluido no viscoso [3].

- Flujo laminar

En el flujo laminar, el fluido se desliza en forma de capas o en láminas. Este tipo de flujo se encuentra en numerosos casos en los que el canal de flujo es relativamente pequeño; la velocidad relativamente baja y la viscosidad bastante alta; como ejemplos tenemos el flujo de engranajes lubricados con aceite, el flujo de líquidos en pequeños canales del cuerpo humano y en instrumentos para medir propiedades de los fluidos. El tipo de aparatos que se muestra esquemáticamente en la figura 1.5 se puede ilustrar varios tipos de flujos.

- Flujo turbulento

En el flujo turbulento, hay movimientos irregulares secundarios y fluctuaciones de la velocidad que se superponen al flujo principal o promedio. El flujo turbulento es muy común y se encuentra en innumerables casos de ingeniería, tales como el flujo en tuberías por otros canales y en diferentes máquinas.

## C.2 Ecuaciones fundamentales

El análisis del flujo se puede llevar a cabo mediante ecuaciones fundamentales, basadas principalmente en la conservación de masa, los momentos y la energía. A partir de estas ecuaciones surgen las ecuaciones de Navier-Stokes, también llamadas ecuaciones generales de la Mecánica de Fluidos[35].

### Ecuación de la conservación de la masa

El principio de conservación de la masa consiste en que la masa total de un sistema cerrado, el cual no intercambia masa en su entorno ni contiene fuentes ni sumideros, permanece constante con el tiempo:

$$\frac{dM}{dt} = 0$$

La ecuación de conservación se puede formular como:

*Variación de masa en un volumen fluido*

$$= \sum \text{flujos másicos entrantes al volumen fluido} \\ - \sum \text{flujos másicos salientes del volumen fluido}$$

La Figura 41 muestra un elemento diferencial de volumen  $dV$ , cuyos lados son  $dx, dy, dz$ . El flujo másico entrante por el lado izquierdo ( $\rho u$ ) cambia de posición desde  $x$  hasta  $x+dx$  produciendo una variación en el flujo másico de valor  $\partial(\rho u)/\partial x dx$ .



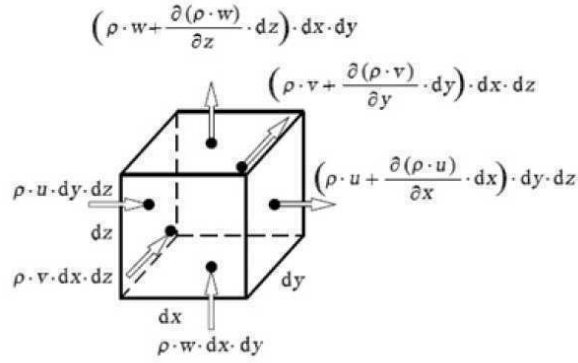


Figura 41. Flujo másico en un elemento diferencial de volumen dV

Por lo que el flujo másico saliente del elemento diferencial de volumen en el eje x a través de la superficie dy dz es:

$$\left( \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right) dy dz \quad (C.1)$$

En las restantes direcciones se obtienen las expresiones análogas tomando como superficies dx dz para el eje y, dx dy para el eje z.

Según la ecuación de conservación, la variación de masa en un volumen fluido corresponde a la diferencia entre el flujo másico entrante y el flujo másico saliente, por lo que formulando este principio y según la ecuación C.1, la cual representa el flujo másico saliente, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz = & \left( \rho u - \left( \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right) \right) dy dz + \left( \rho v - \left( \rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy \right) \right) dx dz \\ & + \left( \rho w - \left( \rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz \right) \right) dx dy \end{aligned} \quad (C.2)$$

Lo que conduce a la ecuación de conservación de la masa o ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (C.3)$$

#### Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

El momento es el producto de la masa por la velocidad. El momento del fluido que se encuentra en el interior del elemento diferencial de volumen es  $\rho dx dy dz \mathbf{v}$  y su variación se puede escribir como:

$$\frac{\partial(\rho dx dy dz \mathbf{v})}{\partial t} = \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dx dy dz \quad (C.4)$$

Inicialmente se va a restringir el estudio al eje x, en el cual, el flujo de momento que entra a través de la superficie dy dz es:

$$(\rho u) u dy dz = \rho u u dy dz \quad (C.5)$$

El valor  $\rho u u$  cambia su valor a lo largo de la dirección x, por lo que el flujo de momento que sale del elemento de volumen a través de la superficie derecha dy dz es:

$$\left( \rho u u + \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} dx \right) dy dz \quad (C.6)$$

En las restantes direcciones se obtienen expresiones análogas tomando como superficies dx dz para el eje y, dx dy para el eje z y tomando las componentes de velocidad adecuadas, v y z respectivamente.

En este caso, los flujos de momento que entran o salen de elemento diferencial de volumen no son las únicas causas que ocasionan la variación de momento en el interior del elemento diferencial. Considerando que la resultante de las fuerzas aplicadas en cada porción de fluido no es nula y según la segunda Ley de Newton podemos obtener lo siguiente:

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \frac{d}{dt} \int_{x=V} \rho \mathbf{v} dV \quad (C.7)$$

Siendo  $\mathbf{F}_i$  las fuerzas que pueden actuar sobre un sistema fluido. Estas fuerzas pueden ser fuerzas de volumen o fuerzas de superficie:

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_v \quad (C.8)$$

En general se puede decir que:

*Variación de momento en un volumen fluido*

$$\begin{aligned} &= \sum \text{flujos momentos entrantes al volumen fluido} \\ &- \sum \text{flujos momento salientes del volumen fluido} \\ &+ \sum \text{tensiones normales y tangenciales sobre el elemento de volumen} \\ &+ \sum \text{fuerzas de volumen sobre la masa del elemento de volumen} \end{aligned}$$

Por lo que formulando queda:

Eje x:

$$\frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot w)}{\partial z} = F_x + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (C.9)$$

Eje y:

$$\frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot v \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot v \cdot w)}{\partial z} = F_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \quad (C.10)$$

Eje z:

$$\frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot w)}{\partial z} = F_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \quad (C.11)$$

Estas ecuaciones son las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento.

### Ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones de Navier-Stokes están constituidas por el conjunto de leyes de conservación de las magnitudes fluidas y todas las relaciones constitutivas necesarias para cerrar el problema. Estas ecuaciones forman un sistema cerrado que permite determinar los valores de todas las magnitudes fluidas.

Se van a obtener estas ecuaciones partiendo de la ley de conservación de cantidad de movimiento a la cual se le va a añadir el efecto de la viscosidad del fluido. EL efecto de la viscosidad queda presente en el tensor de esfuerzos por lo que inicialmente se va a analizar la variación del tensor de esfuerzos debido a los efectos de la viscosidad.

Un fluido no admite esfuerzos cortantes sin deformarse continuamente por lo que la deformación continua implica movimiento. De esto se deduce que si un fluido esta en reposo no puede haber esfuerzos cortantes, por lo que los términos del tensor de esfuerzos que se encuentran fuera de la diagonal principal serán nulos  $\tau_{ij} = -p \cdot \delta_{ij}$ . Además, por convención, en la mayor parte de los casos un fluido estático soporta esfuerzos de compresión, por lo que se suele escribir:

$$\tau_{ij} = -p \cdot \delta_{ij} \quad (C.12)$$

Siendo  $\delta_{ij}$  el tensor delta de Kronecker cuyo valor es uno cuando los subíndices son iguales y cero cuando son distintos.

Además, la presión se puede escribir como la media de los tres esfuerzos normales con signo negativo, el cual indica que la presión actúa en el sentido opuesto a la tensión normal:

$$p = -\frac{\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}}{3} \quad (C.13)$$

En cambio, en un fluido en movimiento sí que aparecen esfuerzos cortantes de manera que el tensor de esfuerzos puede tener sus 6 componentes distintas de cero. Por simplicidad, el tensor de esfuerzos dinámico se construye a partir del término estático, debido a la presión, sumándole un término dinámico  $\tau'$  denominado tensor de esfuerzos viscosos, el cual representa la contribución debida al movimiento del fluido, es decir:

$$\tau = -p \cdot I + \tau' \quad (C.14)$$

Las tensiones normales  $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{zz}$  pueden dividirse en dos partes, la parte debida a la presión y la contribución debida a la fricción del fluido  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ :

$$\tau_{xx} = \sigma_{xx} - p \quad \tau_{yy} = \sigma_{yy} - p \quad \tau_{zz} = \sigma_{zz} - p \quad (C.15)$$

Insertando la ecuación C.15 en las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento, C.9, C.10, C.11 se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot w)}{\partial z} \\ = F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \end{aligned} \quad (C.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot v \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot v \cdot w)}{\partial z} \\ = F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \\ + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \end{aligned} \quad (C.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w^2)}{\partial z} \\ = F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \end{aligned} \quad (C.18)$$

Además, los fluidos, como consecuencia de las débiles interacciones entre sus partículas presentan un comportamiento especial ante esfuerzos tangenciales. En los fluidos las fuerzas internas se reducen a la fricción, cuya acción es disipadora de la energía. Ante una fuerza de cizalla impuesta externamente las partículas fluidas se ponen en movimiento unas respecto a otras generándose una fricción creciente con la velocidad de deformación hasta igualar a la tensión cortante externa. La relación entre la tensión cortante y la velocidad de deformación para un fluido Newtoniano viene dada por la *Ley de Viscosidad de Newton*.

$$\tau_{ik} = \mu \cdot \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (C.19)$$

Siendo  $\mu$  la constante de proporcionalidad. Dicha constante es una propiedad física exclusiva de los fluidos que recibe el nombre de viscosidad dinámica. Además para un fluido Newtoniano se cumple que:

$$\sigma_{xx} = 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (C.20)$$

$$\sigma_{xx} = 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (C.21)$$

$$\sigma_{xx} = 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (C.22)$$

Introduciendo las ecuaciones B.19, B.20, B.21, B.22, junto con la condición de simetría, en las ecuaciones obtenidas a partir de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento B.16, B.17, B.18 se obtienen las ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot u \cdot w)}{\partial z} \\
 & = F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \cdot \left( 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \cdot (\nabla \cdot v) \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \\
 & \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot v \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot v \cdot w)}{\partial z} \\
 & = F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \cdot \left( 2 \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \cdot (\nabla \cdot v) \right) \right] \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{C.23}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w^2)}{\partial z} \\
 & = F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \cdot \left( 2 \cdot \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \cdot (\nabla \cdot v) \right) \right]
 \end{aligned}$$

Para un fluido incompresible  $\nabla \cdot v = 0$

Para un fluido incompresible y asumiendo que la viscosidad es constante las ecuaciones se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) = F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \tag{C.24}$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) = F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \cdot \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \tag{C.25}$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right) = F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \tag{C.26}$$

La ecuación de continuidad C.3, junto con las ecuaciones de Navier-Stokes C.24, C.25, C.26, forman un sistema diferencial, no lineal de segundo orden con 4 ecuaciones y 4 incógnitas, u,v,w,p. El sistema puede ser resuelto aplicando las condiciones de contorno adecuadas para cada tipo de problema. Si se utiliza un fluido compresible, la densidad es una nueva incógnita por lo que es necesario añadir una ecuación adicional que es la ecuación de conservación de la energía.



## Anexo D. Ampliación de los resultados

Este apartado presenta una ampliación de los resultados de este trabajo.

- Pequeño estudio de dependencia de mallas

Se ha realizado un pequeño estudio de sensibilidad de los resultados en función del tamaño de los elementos de las diferentes mallas. Se ha utilizado el modelo que está formado por el cilindro, el filtro y el trombo para realizar este estudio de dependencia de malla. Para ello, se van a representar los perfiles de velocidad de las diferentes mallas a lo largo de dos líneas. La primera línea pasa a través del trombo, y la segunda línea pasa a través del gancho del filtro, como se muestra en la Figura 42.

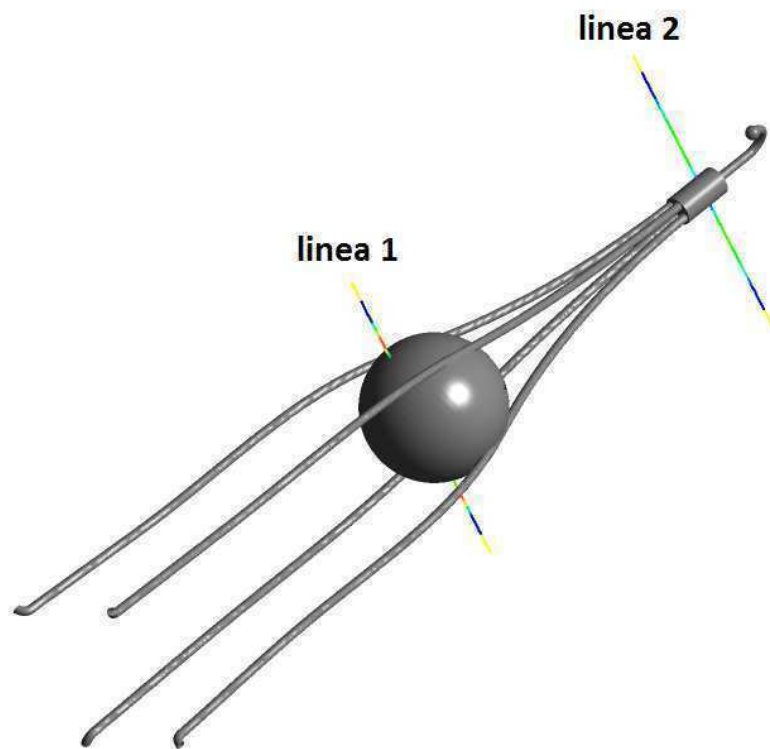


Figura 42. Posición de las líneas de estudio de los perfiles de velocidad

En la Figura 43 se encuentran graficados los perfiles de velocidad para las diferentes mallas a lo largo de la línea 1. Se observa que la velocidad es nula en el centro ya que la línea 1 se encuentra atravesando el trombo como indica la Figura 42. La línea azul corresponde a la malla

con mayor número de elementos, la más fina, y tiene unos valores de velocidad un poco más elevados que los que se obtienen con las otras mallas. La línea roja corresponde a la malla que contiene menor número de elementos y como resultado se obtiene un perfil de velocidad un poquito más bajo que para el resto de mallas. También se han probado otras mallas con un mayor número de elementos a los de la malla correspondiente a la línea azul pero los perfiles de velocidad obtenidos eran prácticamente idénticos por lo que se ha considerado que la malla de 5,549,121 elementos es la malla ideal para la obtención de buenos resultados y en un periodo de tiempo relativamente corto.

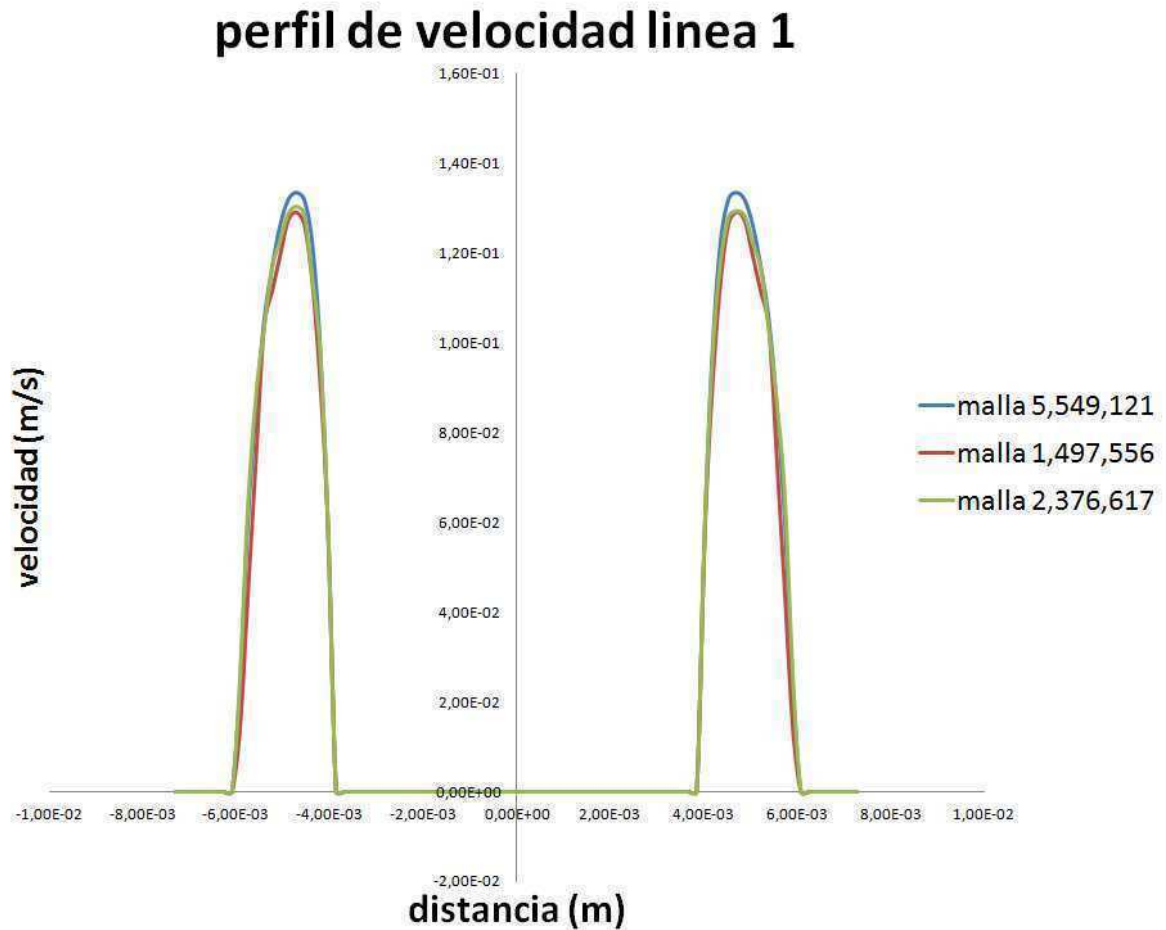


Figura 43. Perfil de velocidad a lo largo de la línea 1

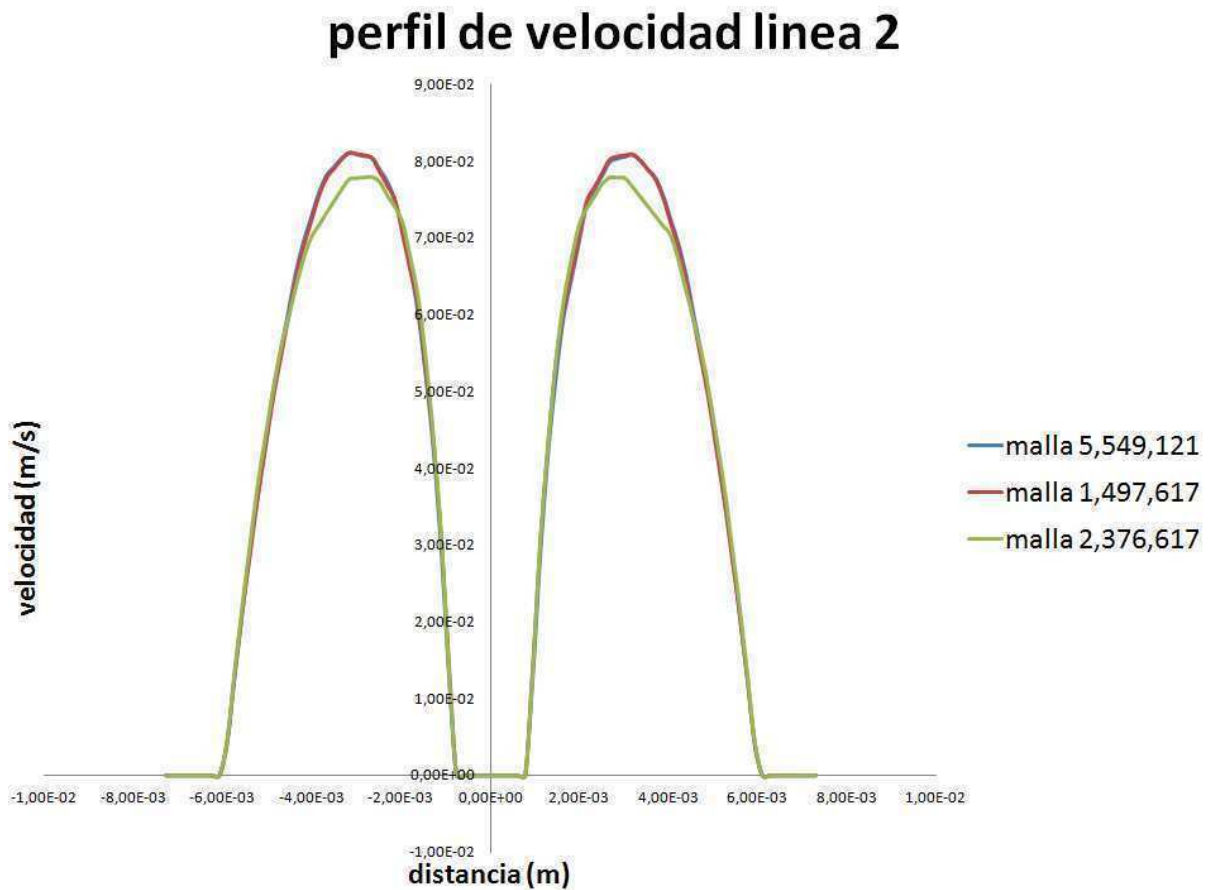


Figura 44. Perfil de velocidad a lo largo de la línea 2

La Figura 44 muestra el perfil de velocidad obtenido para los distintos modelos de mallas a lo largo de la línea 2. La línea 2 pasa por el gancho del filtro y por eso el valor de la velocidad es cero en el centro. Como en el caso anterior, se obtiene unos valores de velocidad un poco más bajos para la malla con un número de elementos más bajo.

- Estudio de velocidad a lo largo de distintas secciones

Se ha representado además la magnitud de velocidad en 4 secciones diferentes a lo largo del filtro para ver cómo se desarrolla el flujo. Se han estudiado 4 secciones representativas: una a la entrada del filtro, otra a la salida, otra a mitad de camino y una a lo largo del trombo como se puede ver en la Figura 45.

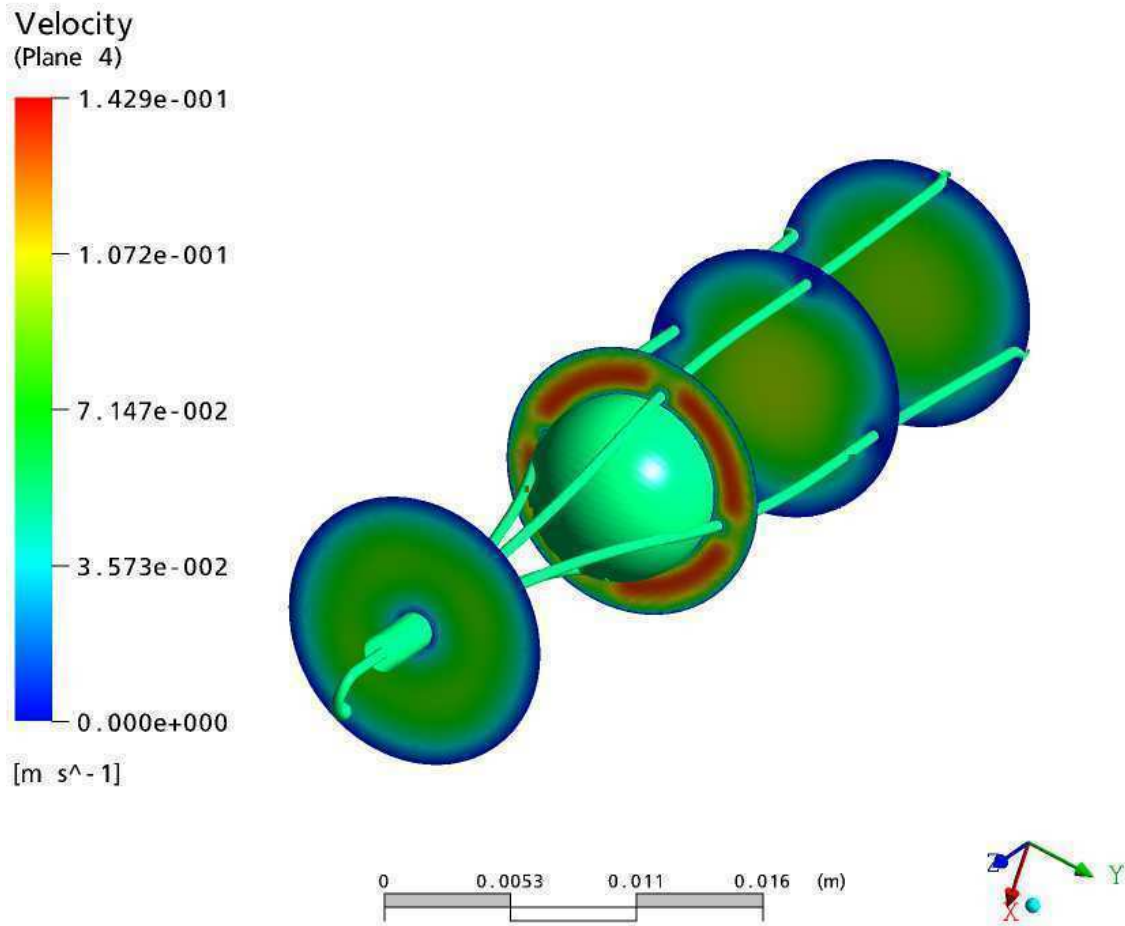


Figura 45. Magnitudes de velocidad a lo largo de distintas secciones

En la Figura 46 se pueden ver con más detalle cada una de las distintas secciones. Como se puede observar la velocidad es nula tanto en la pared del cilindro como en el perímetro del dispositivo debido a la imposición de la condición de contorno de pared no deslizante. En la segunda sección se puede ver un claro aumento de velocidad debido a la reducción de área libre para que viaje el fluido por el interior del cilindro. En la tercera figura se puede apreciar un poco más que en la primer y última sección la influencia del filtro en el flujo.

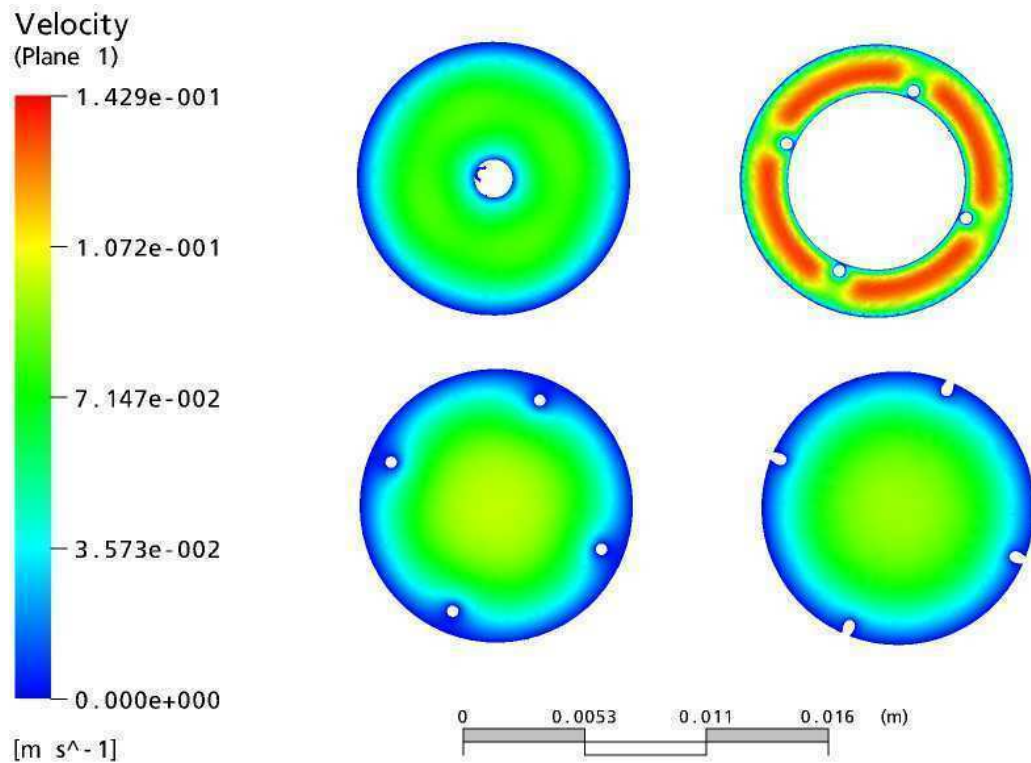


Figura 46. Magnitudes de velocidad en las distintas secciones

- Estudio de la presión a lo largo del sistema

También se ha realizado un pequeño estudio de los cambios de presión a lo largo de todo el recorrido del fluido. En la Figura 47 se puede observar como la presión es mucho mayor antes de atravesar el trombo y una vez el trombo ha sido atravesado por el flujo se produce un gran aumento en la presión total. Al principio del tubo se observa que la presión alcanza su valor máximo y va descendiendo poco a poco hasta que se estabiliza, una vez la condición de flujo desarrollado ha sido alcanzada. Una vez el flujo llega a la altura del trombo el área libre para que pase el flujo desciende drásticamente y como consecuencia tanto la velocidad como la presión aumentan. Una vez el flujo ha pasado el trombo el área libre aumenta repentinamente y por eso se produce de la presión total.



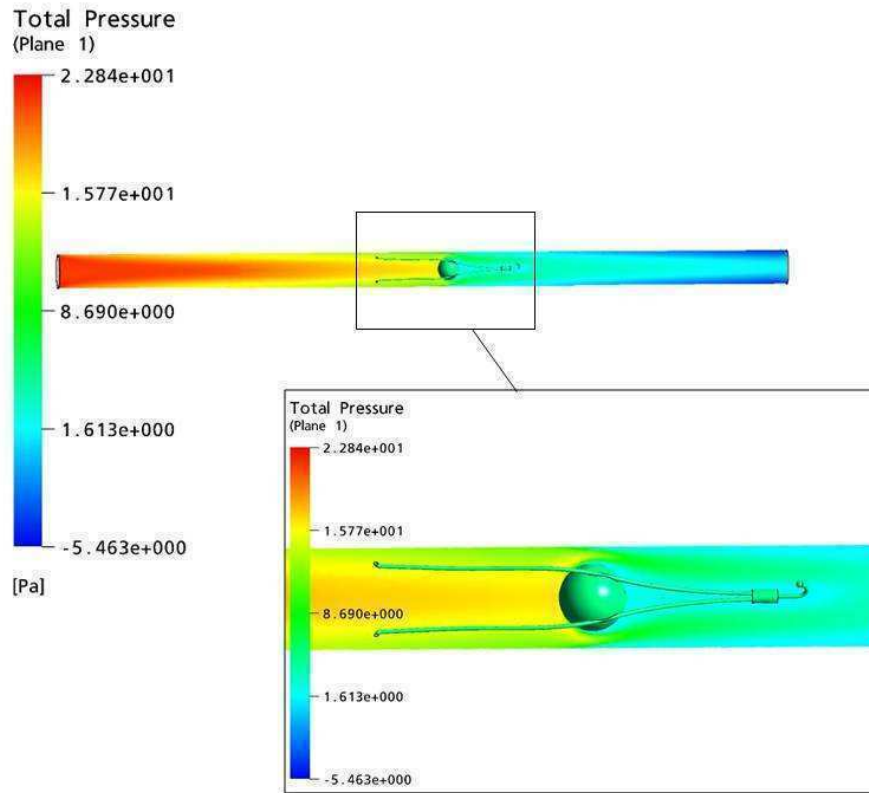


Figura 47. Magnitudes de presión a lo largo de la vena

- Análisis de la tensión tangencial

Por último se ha visualizado la tensión tangencial en el modelo de filtro y en el modelo de filtro con trombo para ver qué diferencias hay entre ambos y como afecta la introducción del trombo en el modelo. La Figura 48 muestra las magnitudes que la tensión tangencial toma para ambos modelos. Como se puede ver, el efecto más importante es en superficie del filtro. Además se ve como la tensión aumenta en la zona en la que el trombo toca la pared y las patas del filtro entran en contacto con la pared. Esto se debe a que tiene lugar una concentración de tensiones y de elevados gradientes de velocidad.

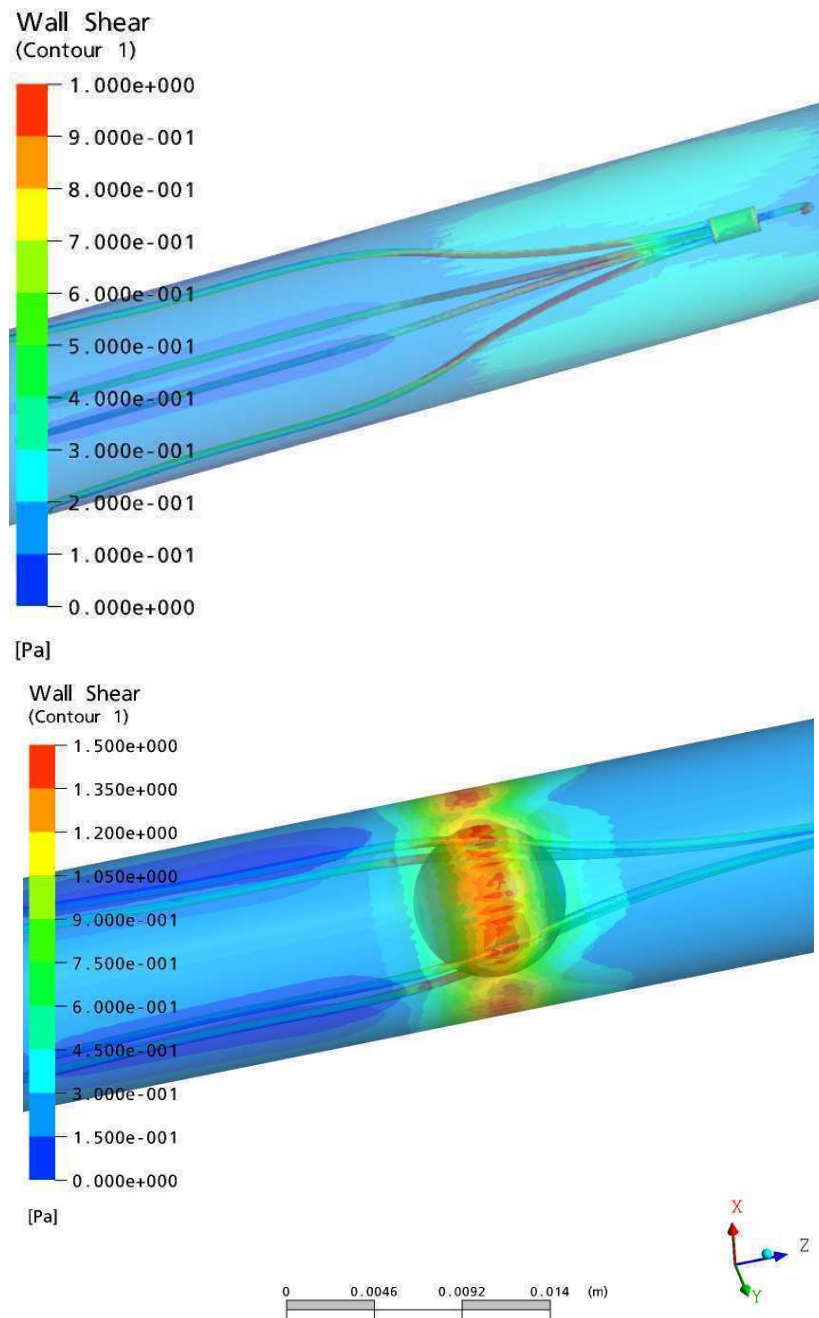


Figura 48. Tensión tangencial a lo largo del vaso. La imagen superior muestra la tensión tangencial para el modelo de vena con filtro y la imagen superior para el modelo de filtro con trombo.